8

MATE 2000+

consolidare

Anton Negrilă
Maria Negrilă

partea a II-a

matematică

algebră · geometrie

Editura Paralela 45

EDITURA PARALELA 45

ALGEBRĂ

Capitolul I

CALCULUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

PP **Competențe specifice**

C1. Identificarea componentelor unei expresii algebrice

C2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere

C3. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor

C4. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric

C5. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric

C6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

EDITURA PARALELA 45

PE-PP 1. OPERAȚII CU RAPOARTE ALGEBRICE DE NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

1.1. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA

Suma (diferența) a două rapoarte algebrice este tot un **raport algebric**. Operația de adunare (scădere) a două rapoarte algebrice se poate face în două situații:

- dacă ambele rapoarte au **același numitor**, suma lor este un raport algebric care are ca numitor numitorul comun al celor două rapoarte și ca numărător suma (diferența) numărătorilor celor două rapoarte;
- dacă cele două rapoarte au **numitori diferiți**, se amplifică, aducându-se la același numitor, și se adună (se scad) conform regulii de mai sus.

OBSERVAȚIE: Operația de adunare (scădere) a rapoartelor algebrice are aceleași proprietăți ca operația de adunare (scădere) a fracțiilor ordinare.

EXEMPLE:

a) $\frac{5x-3}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x^2+12}{4}=\frac{5x-3+x+x^2+12}{4}=\frac{x^2+6x+9}{4}=\frac{(x+3)^2}{4}$;

b) $\frac{2x+7}{3x}+\frac{x-3}{2x^2}+\frac{4x+5}{6}=\frac{2x(2x+7)}{6x^2}+\frac{3(x-3)}{6x^2}+\frac{x^2(4x+5)}{6x^2}=\frac{4x^3+9x^2+17x-9}{6x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Efectuați:

a) $\frac{x}{5}+\frac{2}{5}$; b) $\frac{3x+2}{7}+\frac{4x+5}{7}$; c) $\frac{2-3x}{11}+\frac{9-8x}{11}$;

d) $\frac{4x+6}{3}+\frac{x+3}{3}$; e) $\frac{x-3}{2}+\frac{3x+4}{2}+\frac{4x+7}{2}$; f) $\frac{x+5}{3}+\frac{2-7x}{2}+\frac{2x-4}{5}$.

2. Efectuați calculele:

a) $\frac{7x-6}{x-2}+\frac{2-5x}{x-2}$; b) $\frac{17x+9}{x+1}+\frac{8}{x+1}$;

c) $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{2x-14}{x-3}$; d) $\frac{6x}{3x-2}+\frac{5-3x}{3x-2}-\frac{7}{3x-2}$.

3. Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{2}+\frac{x+2}{3x}-\frac{5x^2+4}{6x^2}$; b) $\frac{2x}{x^2+x}+\frac{2}{x^2+x}$; c) $\frac{2x+3}{x^2-1}+\frac{3x+2}{x^2-1}$; d) $\frac{x(x-1)}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2-4}$;

e) $\frac{x^2}{x^2-2x}+\frac{2-3x}{x^2-2x}$; f) $\frac{x^2+3}{x^2+2x-3}+\frac{4x}{x^2+2x-3}$; g) $\frac{x(x-3)}{x^2-16}+\frac{2x-5}{x^2-16}-\frac{11-x}{x^2-16}$.

EDITURA PARALELA 45

PE Aplicare și exersare ◆ ◆

4. Efectuați:

a) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$;

b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}$;

c) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2-4}$;

d) $\frac{4}{x+2}-\frac{x+10}{x^2-4}+\frac{3}{x-2}$;

e) $\frac{1-3x}{x^2-x}+\frac{2}{x-1}+\frac{5}{3x}$;

f) $\frac{3x+1}{2x^2-6x}-\frac{x+2}{3x-9}+\frac{2x-1}{6x}$.

5. Calculați:

a) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+4}{x^2+3x+2}-\frac{x-1}{x+2}$;

b) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{4}{x^2-1}+\frac{1-x}{x+1}$;

c) $\frac{2x+1}{x-2}+\frac{1-2x}{x+2}+\frac{x^2+16}{x^2-4}$;

d) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}+\frac{5-x^2}{x^2+3x+2}$.

6. Calculați:

a) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}+\frac{24}{x^2-9}$;

b) $\frac{x+1}{x-4}+\frac{16-6x}{x^2-16}-\frac{x-1}{x+4}$;

c) $\frac{x+2}{x-3}-\frac{x-3}{x-4}+\frac{5}{x^2-7x+12}$;

d) $\frac{x-5}{x-2}-\frac{x+1}{x-4}-\frac{6}{x^2-6x+8}$.

PE Aprofundare și performanță ◆ ◆ ◆

7. Efectuați calculele:

a) $\frac{x^2+4}{x^2-4}-\left[\frac{5}{x-2}-\left(\frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\right]$;

b) $\frac{4x+5}{x^2-1}-\left[\frac{2}{x-1}-\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right]$;

c) $\frac{x^2-27}{x^2-9}-\left[\frac{5}{x+3}-\left(\frac{x}{x-3}-\frac{x+1}{x+3}\right)\right]$;

d) $\frac{x}{x^2-25}-\left[\frac{3}{x-5}-\left(\frac{x+1}{x-5}-\frac{3}{x+5}+\frac{x^2}{25-x^2}\right)\right]$.

8. Fie expresia $E(x)=\frac{3}{4x^2-9}-\frac{x+1}{2x+3}-\frac{x}{2x-3}$.

a) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Aflați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{N}$.

9. Se consideră expresia $F(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x+2}{x^2-1}$.

a) Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $F(x)$ nu este definită.

b) Arătați că $G(x)=(x+1)\cdot F(x)$ este număr natural.

c) Calculați suma: $F(2)\cdot F(3)+F(3)\cdot F(4)+\ldots+F(2020)\cdot F(2021)$.

PE-PP Supermate ◆ ◆ ◆ ◆

10. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{12}{x^2-9}+\frac{x}{x-3}\right)-\left[\frac{x+1}{x+3}+\left(\frac{x+2}{x-3}-\frac{x}{x+3}\right)\right]$.

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați valorile lui $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{Z}$.

EDITURA PARALELA 45

PE-PP 2. ECUAȚII DE FORMA $ax^2 + bx + c = 0$, UNDE $a, b, c \in \mathbb{R}$

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ ($x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) este echivalentă cu ecuația $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, adică:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \text{ sau } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Putem descompune membrul stâng în produs de factori numai dacă numărul $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$. Semnul acestui număr este același cu semnul numărătorului $b^2 - 4ac$. De aceea, numărul $b^2 - 4ac$ este numit **discriminantul ecuației**. El se notează, de obicei, cu litera grecească Δ (se citește „delta").

Distingem trei **cazuri**:

- $\Delta > 0$. În acest caz, ecuația are două soluții: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$;
- $\Delta = 0$. În acest caz, ecuația are cele două soluții confundate: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;
- $\Delta < 0$. În acest caz, ecuația nu are nicio soluție reală.

EXEMPLE:

1. Determinați numărul real a pentru care ecuația $(a + 1)x^2 + (2a + 3)x - a = 0$ are soluția $x = \frac{1}{3}$. Determinați cea de-a doua soluție pentru valoarea lui a determinată anterior.

Soluție:

Dacă $x = \frac{1}{3}$, înlocuind în ecuație, se obține ecuația $\frac{a+1}{9} + \frac{2a+3}{3} - a = 0$, care are ca soluție $a = 5$. Prin înlocuirea lui a în ecuație se obține ecuația $6x^2 + 13x - 5 = 0$. Se calculează $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 289$, iar $\sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17$. Atunci soluțiile ecuației sunt: $x_1 = \frac{-13 + 17}{12} = \frac{-30^{(6}}{12} = -\frac{5}{2}$ și $x_2 = \frac{-13 + 17}{12} = \frac{4^{(4}}{12} = \frac{1}{3}$.

2. Rezolvați ecuația $\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1}$.

Soluție:

Ecuația este definită pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Se înmulțește ecuația cu $(x^2 - 1)$ și se obține ecuația echivalentă $6 - 2(x + 1) = 2(x - 1)(x + 1) - (x + 4)(x - 1)$. Prin desfacerea parantezelor și trecerea termenilor în același membru se obține ecuația echivalentă $x^2 - x - 2 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ și, cum $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, rezultă doar soluția $x = 2$.

EDITURA PARALELA 45

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Rezolvați ecuațiile:

a) $x(x+7)=0$; **b)** $(x-1)(x+2)=0$; **c)** $(x-3)(x+4)=0$;
d) $(x+1)(x-6)=0$; **e)** $(x+3)(x-2)=0$; **f)** $(2x-1)(2x+3)=0$;
g) $(2x+5)(5x+2)=0$; **h)** $(3x-8)(2x+9)=0$; **i)** $(4x+3)(7x-2)=0$.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $x^2+3x=0$; **b)** $x^2-2x=0$; **c)** $3x^2+9x=0$;
d) $4x^2-8x=0$; **e)** $6x^2-x=0$; **f)** $-5x^2+8x=0$;
g) $-0{,}6x^2+3{,}6x=0$; **h)** $-0{,}5x^2-2{,}5x=0$; **i)** $0{,}4x^2-2{,}4x=0$.

3. Determinați mulțimea soluțiilor reale pentru fiecare dintre ecuațiile:

a) $x^2-1=0$; **b)** $x^2-4=0$; **c)** $4x^2-9=0$; **d)** $25x^2-16=0$;
e) $64x^2-81=0$; **f)** $36x^2-25=0$; **g)** $5x^2-45=0$; **h)** $3x^2-12=0$;
i) $6x^2-216=0$; **j)** $x^2+4=0$; **k)** $-x^2-16=0$; **l)** $x^2+25=0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2-7x+6=0$; **b)** $x^2+2x-8=0$; **c)** $x^2+5x-14=0$;
d) $x^2-8x-20=0$; **e)** $x^2+4x-12=0$; **f)** $x^2-7x-30=0$;
g) $x^2-9x+14=0$; **h)** $x^2-10x+16=0$; **i)** $x^2+7x+10=0$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2-5x+6=0$; **b)** $x^2+x-6=0$; **c)** $x^2-7x+12=0$;
d) $x^2+x-12=0$; **e)** $x^2-6x+8=0$; **f)** $x^2+3x-10=0$;
g) $x^2-8x+15=0$; **h)** $x^2+2x-24=0$; **i)** $x^2-4x-21=0$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x-1)^2-4=0$; **b)** $(x+2)^2-9=0$; **c)** $(x-3)^2-16=0$;
d) $(x+4)^2-25=0$; **e)** $(x-2)^2-100=0$; **f)** $(x+\sqrt{3})^2-12=0$.

PE APLICARE ȘI EXERSARE ◆ ◆

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(x+2)^2-25=0$; **b)** $x^2+6x+9=1$; **c)** $x^2+4x+4=-1$;
d) $x^2+4x+4=0$; **e)** $x^2+10x+25=9$; **f)** $x^2-8x+16=0$.

8. Determinați valoarea lui $a\in\mathbb{R}$, știind că ecuația $2x^2+ax-4=0$, $x\in\mathbb{R}$, are soluția $x=-4$. Determinați cealaltă soluție a ecuației pentru valoarea lui a determinată anterior.

9. Știind că 2 este soluție a ecuației $ax^2-3x+a-4=0$, determinați valoarea lui $a\in\mathbb{R}$. Pentru a determinat, rezolvați ecuația.

10. Ecuația $(a-1)x^2+7x+a=0$ are soluția $x=-3$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ în această condiție și rezolvați apoi ecuația obținută.

EDITURA PARALELA 45

20. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x^2-x}{x+1}=\frac{3}{2}$; b) $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x}{6}$; c) $\frac{x^2+1}{2}=5(x-2)$;

d) $\frac{x^2-1}{x^2+1}=-\frac{1}{2}$; e) $\frac{x^2+2}{x^2+4}=\frac{3}{4}$; f) $\frac{(x-1)^2}{3}=2x-5$;

g) $\frac{3x+1}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$; h) $\frac{5x+1}{x+1}=\frac{x+2}{x}$; i) $\frac{x-7}{3x+1}=\frac{x}{x-3}$.

21. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{2x-5}{x-1}-\frac{5x-3}{3x+5}=0$; b) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2-x}=0$;

c) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{2-x}{x+2}=3$; d) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x+1}=2\frac{1}{12}$.

22. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}+\frac{3x^2}{4(x-2)(x-5)}=0$; b) $\frac{3x-4}{x-1}=\frac{2x+5}{x+2}-\frac{1}{x-1}$;

c) $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$; d) $\frac{2x-1}{x+7}-\frac{3x+4}{x-1}=0$;

e) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x^2}{(x-3)(x-1)}=0$; f) $\frac{(x+3)^2}{5}+2-\frac{(3x-1)^2}{5}=2x(x-1)-x$;

g) $\frac{3x}{2(9x+3)}=\frac{x+2}{3x-1}-\frac{8x^2+3}{9x^2-1}$.

PE-PP SUPERMATE ◆ ◆ ◆ ◆

23. Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $(m-1)x^2-2(m+1)x+m=0$, $m\neq 1$, are soluții reale.

24. Arătați că ecuația $(a+1)x^2+(a^2+2a+2)x+a+1=0$ are soluții reale, pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

25. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2+(m+1)x+m=0$, $m>1$.

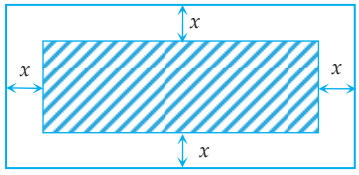
PE-PP PROBLEME DE MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN VIAȚA COTIDIANĂ

1. Un teren agricol de forma unui dreptunghi are lungimea egală cu dublul lățimii. Aflați dimensiunile acestui teren, știind că, dacă mărim lățimea cu 1 m și lungimea cu 3 m, aria terenului este egală cu 78 m².

2. O terasă avea formă pătratică. Proprietarul a mărit o latură cu 1 m, iar cealaltă latură cu 5 m. După modificare, terasa are o suprafață dreptunghiulară de 45 m². Care a fost dimensiunea inițială a laturii terasei?

3. Un triunghi dreptunghic are dimensiunile laturilor exprimate în metri: $5-x$, $6-x$ și 5. Aflați valoarea lui x pentru care aria triunghiului este minimă.

4. O grădină are formă dreptunghiulară cu lungimea de 32 m și lățimea de 12 m, ca în desenul alăturat. Grădina este înconjurată de o alee cu aceeași lățime. Determinați lățimea pe care o are aleea, știind că suprafața hașurată este de 300 m².



EDITURA PARALELA 45

Capitolul II
FUNCȚII

PP **Competențe specifice**

C1. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date
C2. Descrierea unor dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule
C3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora
C4. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale
C5. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar
C6. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală

EDITURA PARALELA 45

Fie A și B două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca **fiecărui** element din mulțimea A să-i corespundă **un singur** element din mulțimea B, spunem că am definit o funcție de la A la B.

Mulțimea A se numește **domeniu de definiție** al funcției, iar mulțimea B se numește **codomeniul** sau mulțimea în care funcția ia valori. În general, o funcție f definită pe A cu valori în mulțimea B va fi notată $f: A \to B$. Citim „f definită pe A cu valori în B". Funcțiile se notează de obicei cu f, g, h, ...

Fiind dată o funcție $f: A \to B$, dacă aceasta face ca elementului $a \in A$ să-i corespundă elementul $b \in B$, scriem $f(a) = b$ și spunem că b este valoarea funcției în a.

Legătura pe care o stabilește funcția între elementele $x \in A$ și valorile corespunzătoare $f(x)$ din B se numește **lege de corespondență**. O funcție se descrie prin trei componente:

- domeniul de definiție;
- codomeniul;
- legea de corespondență.

Legea de corespondență a unei funcții poate fi dată în mai multe moduri:

- se poate descrie cu ajutorul **diagramelor**;
- se poate exprima prin indicarea într-un **tabel** a valorilor corespunzătoare elementelor din domeniul de definiție;
- se poate descrie cu ajutorul unei **formule** prin care se precizează valoarea $f(x)$, pentru oricare x din domeniul de definiție.

Fiind dată o funcție $f: A \to B$, mulțimea punctelor din plan având coordonatele (x, y), unde $x \in A$, iar $y = f(x)$, va fi numită **graficul funcției**. Această mulțime se scrie $G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$.

Egalitatea $y = f(x)$, adevărată pentru oricare element $x \in A$, va fi numită **ecuația graficului** funcției f. Se obișnuiește să se noteze $y = f(x)$, $x \in A$.

Fie $f: A \to B$ o funcție. **Imaginea** (sau mulțimea valorilor) funcției f este mulțimea $\text{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in A\}$. În mod evident, $\text{Im}\, f \subset B$.

Se mai poate scrie și astfel: $\text{Im}\, f = \{y \in B \mid \text{există } x \in A, \text{ astfel încât } y = f(x)\}$.

O funcție ale cărei domeniu de definiție și codomeniu sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ (mulțimi de numere) se numește **funcție numerică**.

Două funcții $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$. Se notează $f = g$.

În general, o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descrisă de formula $f(x) = ax + b$ (unde a și b sunt numere reale) se numește **funcție liniară**. Reprezentarea geometrică a mulțimii grafic pentru o funcție liniară este o dreaptă.

Pentru a trasa graficul unei funcții liniare este suficient să dăm variabilei x două valori distincte.

Observații:

- Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a \neq 0$ și $b = 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = ax$, ale căror grafice conțin originea axelor de coordonate.
- Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, se obțin funcțiile liniare $f(x) = b$, ale căror grafice sunt drepte paralele cu axa Ox. Funcțiile de acest fel sunt numite **funcții constante nenule**.
- Pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă $a = b = 0$, se obține o funcție $f(x) = 0$, al cărei grafic coincide cu axa Ox.
- Uneori, pentru trasarea graficului unei funcții liniare este mai comod să se stabilească punctele în care graficul intersectează axele de coordonate:
  - $G_f \cap Oy = A(0; f(0)) \Leftrightarrow G_f \cap Oy = A(0; b)$;
  - $G_f \cap Ox = B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

EDITURA PARALELA 45

PE-PP 1. FUNCȚII DEFINITE PE MULȚIMI FINITE

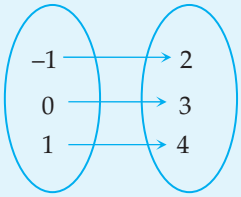
EXEMPLE:

1. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel funcția următoare:

$$f: \{-1, 0, 1\} \to \{2, 3, 4\}, f(x) = x + 3.$$

Soluție:

$f(-1) = -1 + 3 = 2, f(0) = 0 + 3 = 3, f(1) = 1 + 3 = 4.$



x	–1	0	1
$f(x)$	2	3	4

2. Explicitați domeniul de definiție pentru funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$ și $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \le x < 3\}$.

Soluție:

Cum $x \neq 0 \Rightarrow A = \{-1, 1, 2\}$.

3. Fie funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 2$ și $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \le 2\}$. Determinați valoarea lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care punctul $B(1; -1)$ aparține graficului funcției.

Soluție:

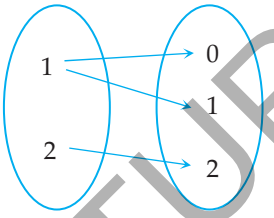
$A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Dacă $B(1; -1) \in G_f \Rightarrow f(1) = -1$. Cum $f(1) = a + 2 \Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$.

ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

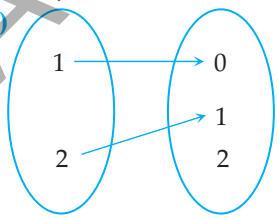
PE ÎNȚELEGERE ◆

1. Precizați care dintre diagramele de mai jos definesc funcții:

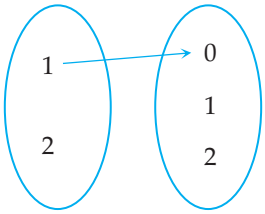
a)



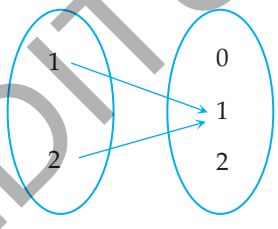
b)



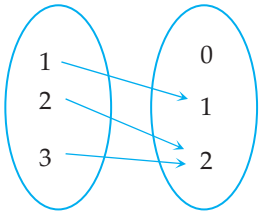
c)



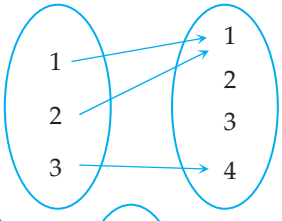
d)



e)



f)

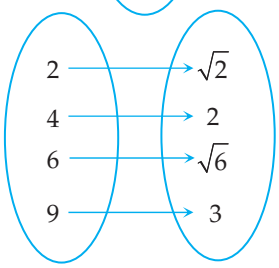


2. Diagrama alăturată definește o funcție.

a) Precizați domeniul și codomeniul funcției.

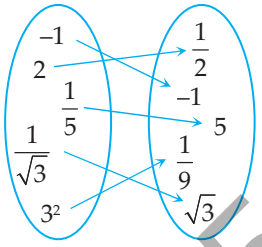
b) Reprezentați printr-un tabel funcția definită de diagramă.

c) Stabiliți legea de corespondență printr-o formulă.



EDITURA PARALELA 45

3. În diagrama alăturată este descrisă o funcție $f : A \to B$.



a) Precizați elementele mulțimilor A și B.

b) Realizați tabelul de valori al funcției f.

c) Descrieți corespondența $x \to f(x)$ printr-o formulă.

4. Descrieți printr-o diagramă, apoi printr-un tabel, funcțiile următoare:

a) $f : \{0, 2, 4\} \to \{0, 2, 4, 6\}$, $f(x) = x + 2$;

b) $g : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $g(x) = x^2$.

5. Prețul unui kilogram de mere este 2 lei. Completați tabelul:

Cantitatea (kg)	3	4,5	7	10	13	35	96
Prețul total (lei)					26		

a) Stabiliți o formulă pentru corespondența realizată între elementele din tabel.

b) Realizați o diagramă corespunzătoare valorilor din tabel.

c) Definiți o funcție cu formula de la subpunctul a), stabilind domeniul și codomeniul acesteia, conform tabelului.

6. Un automobil are de parcurs un drum de 360 km. Completați tabelul:

Timpul (ore)	6	8	4	9	12	18
Viteza (km/h)		45				

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

7. Un bazin cu capacitatea de 240 hl se umple cu ajutorul unor robinete cu debitul de 10 hl/h. Completați tabelul:

Numărul de robinete	6	4	2	8	12	24
Timpul de umplere (ore)			12			

a) Stabiliți o formulă care să vă ajute să completați tabelul.

b) Scrieți funcția definită de această formulă, stabilind domeniul și codomeniul indicate în tabel.

8. Care dintre tabelele de mai jos descrie o funcție?

a)

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	3

b)

x	1	2	1
$f(x)$	2	4	5

c)

x	−1	2	4
$f(x)$	0	4	6

d)

x	−2	−1	0	1	−1
$f(x)$	4	5	3	2	1

9. Care dintre următoarele relații nu reprezintă o funcție?

a) $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$. **b)** $g : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x^2$. **c)** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{2}{x}$.

10. Fie funcția $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$, $f(x) = |x|$.

a) Stabiliți elementele mulțimii grafic.

b) Stabiliți care dintre punctele $A(-1; 1)$, $B(2; -2)$, $C(1; 1)$, $D(-3; 3)$, $E(0; 0)$ se găsesc pe graficul funcției.

11. Fie funcția $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$. Stabiliți care dintre punctele următoare aparțin graficului funcției: $A(-2; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(0; 3)$, $D(1; 5)$, $E(2; 6)$.

EDITURA PARALELA 45

c) $f:\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\begin{cases}2x-2, \text{ dacă } x\le -1\\ x+1, \text{ dacă } x\in\{0,1\}\\ 3x-2, \text{ dacă } x>1\end{cases}$.

21. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\{-2,-1,0,1,2,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+3$; **b)** $f:\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|-2$;

c) $f:\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\begin{cases}-x+1, \text{ dacă } x<-1\\ x+2, \text{ dacă } x\ge -1\end{cases}$.

22. Pentru fiecare dintre funcțiile care urmează, stabiliți inițial domeniul de definiție, apoi reprezentați-le grafic:

a) $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2$, unde $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<3\}$;

b) $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$, unde $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x-1|\le 2\}$;

c) $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{1}{2}x+1$, unde $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-2\le\frac{3x-1}{5}<1\right\}$.

23. Se consideră funcția $f:\{-2,-1,0,1,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ dacă } x<0\\ 2x^2, \text{ dacă } x\ge 0\end{cases}$. Determinați numerele reale a, b, c și d, știind că punctele $A(-2;a)$, $B(-1;b)$, $C(1;c+4)$ și $D(3;6d)$ aparțin graficului funcției.

24. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\{-2,-1,1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{x}$; **b)** $f:\{-3,-1,0,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$; **c)** $f:\{-2,-1,1,4\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-|x|$.

PE Aprofundare și performanță ◆ ◆ ◆

25. Se consideră funcția $f:\{-3,-2,0,1,2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$, știind că punctele $A(-2;-8)$ și $B(2;4)$ aparțin graficului funcției. Reprezentați grafic funcția.

26. Demonstrați că nu există o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice număr real x, să avem $f(x)+f(2-x)=x+1$.

27. Considerăm funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, unde $f(n)$ este numărul divizorilor naturali ai lui n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați numărul divizorilor naturali $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(24)$, $f(36)$.

b) Caracterizați numerele naturale x pentru care $f(x)=2$, apoi pe cele pentru care $f(x)=3$.

28. Se consideră funcția $f:A\to\mathbb{Z}$, unde $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\left|\frac{x-1}{2}\right|\le 2\right\}$, $f(x)=|x|$.

a) Determinați elementele mulțimilor A și Im f. **b)** Reprezentați grafic funcția.

c) Calculați suma elementelor mulțimii Im f.

PE=PP Supermate ◆ ◆ ◆ ◆

29. Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=$ ultima cifră a numărului natural x^2.

a) Determinați Im f. **b)** Calculați $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(21)$.

30. Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=$ ultima cifră a lui 3^x.

a) Determinați Im f. **b)** Calculați $f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(32)$.

EDITURA PARALELA 45

PE-PP RECAPITULARE ȘI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

• *Timp de lucru 120 de minute. Se acordă 10 puncte din oficiu.*

TESTUL 1

Subiectul I *(30 puncte)*

(5p) **1.** Fie $f:[-2;5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+3$. Dacă punctul $A(1;5)\in G_f$, atunci valoarea reală a lui a este … .

(5p) **2.** Dacă segmentul AB este reprezentarea grafică a funcției $f(x)=ax+b$, unde $A(-3;9)$ și $B(4;-5)$, atunci valorile reale ale numerelor a și b sunt $a=\ldots$ și $b=\ldots$.

(5p) **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+4$. Punctul de coordonate egale de pe graficul funcției este $A(\ldots;\ldots)$.

(5p) **4.** Coordonatele punctului de intersecție a reprezentării grafice a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$ cu axa absciselor sunt $(\ldots;\ldots)$.

(5p) **5.** Fie $f:[x_1;x_2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+1$. Știind că reprezentarea grafică a funcției este segmentul AB, cu $A(x_1;4)$ și $B(x_2;-2)$, atunci intervalul $[x_1;x_2]$ este $[\ldots;\ldots]$.

(5p) **6.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a-3)x+8$. Valoarea reală a lui a pentru care punctul $A(2;6)\in G_f$ este … .

Subiectul al II-lea *(30 puncte)*

(10p) **1.** Fie funcția $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$, unde $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-5\le\frac{3x-1}{2}\le 4\right\}$.

a) Determinați mulțimea A și reprezentați grafic funcția într-un sistem de axe de coordonate.
b) Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției cu axa ordonatelor.
c) Calculați lungimea segmentului ce reprezintă graficul funcției.

(10p) **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care îndeplinește condiția $f(x)=-2x+5$.

a) Reprezentați grafic funcția cu ajutorul punctelor de intersecție a graficului cu axele de coordonate.
b) Calculați aria triunghiului determinat de axele de coordonate și dreapta ce reprezintă graficul funcției.

(10p) **3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+7$.

a) Reprezentați grafic funcția. **b)** Calculați suma $S=f(1)+f(2)+\ldots+f(37)$.

Subiectul al III-lea *(30 puncte)*

(15p) **1.** Se consideră funcțiile $f:[-2;3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$ și $g:[-4;4]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+3$.

a) Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două grafice.
b) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.
c) Aflați aria triunghiului determinat de axa ordonatelor și de dreptele ce reprezintă graficele celor două funcții.

(15p) **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x+3)$.

a) Determinați legea de corespondență a funcției g.
b) Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de axe de coordonate.
c) Calculați suma $S=f(-1)+f(-2)+\ldots+f(-25)+g(1)+g(2)+\ldots+g(26)$.

EDITURA PARALELA 45

Capitolul III
TEME PENTRU RECAPITULAREA FINALĂ ÎN VEDEREA EVALUĂRII NAȚIONALE

PE-PP 1. NUMERE NATURALE. PUTERI CU EXPONENT NUMĂR NATURAL. DIVIZIBILITATE

1. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția $\overline{ab} + 5a = 3(a + b + c)$.

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că este îndeplinită condiția $\overline{abc} - \overline{ab} = 13c$.

3. Determinați numerele naturale a și b, știind că numărul a este prim și $a + 6b = 56$.

4. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} + \overline{bc} + c = 444$.

5. Determinați numărul natural de trei cifre $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$, știind că $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$.

6. Determinați numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, cu $a > b > c$, știind că este îndeplinită condiția:

$$\overline{abc} - \overline{bc} = 40(b + c + 5).$$

7. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, scris în baza 10, cu $a \neq b$, știind că $\overline{ab} - \overline{ba} = a(b - 1)$.

8. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care are loc egalitatea $\overline{abc} = 3\overline{cba} + a + b + c$.

9. Determinați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, știind că sunt divizibile cu 5 și suma cifrelor lor este egală cu 20.

10. Determinați numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{ba} + 5(2a + 3b) = 202$.

11. Calculați suma numerelor naturale $\overline{ab}$ pentru care este îndeplinită condiția $\overline{ab} = 2a + 5b$.

12. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$, $a \neq b$, care îndeplinesc condiția $\overline{ab} + \overline{ba} = 66$.

13. Arătați că $37 \mid A$, unde $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

14. Arătați că numărul $a = 2 \cdot 3^{12n+5} + 4 \cdot 3^{12n+4} - 14 \cdot 3^{12n+3}$ este divizibil cu 48, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

15. Arătați că numărul $a = 3^{2n+2} \cdot 2^{n+3} + 3^{2n+1} \cdot 2^{n+4} - 9^n \cdot 2^{n+5}$ este divizibil cu 88, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Arătați că numărul $a = 4 \cdot 5^{6n+4} + 6 \cdot 5^{6n+6} - 2 \cdot 5^{6n+5}$ este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Arătați că $11 \mid A$, unde $A = 8^{n+1} \cdot 5^{3n} + 2^{3n+2} \cdot 125^n - 4^n \cdot 5^{2n} \cdot 10^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Arătați că numărul $A = 2^{3n+2} \cdot 25^{n+1} - 8^{n+1} \cdot 5^{2n+1} - 3 \cdot 4^n \cdot 5^{n+1} \cdot 10^n$ este divizibil cu 9, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Fie $a = 4^{2n+3} + 3 \cdot 16^{n+1} + 36 \cdot 4^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că numărul a este pătrat perfect.

20. Arătați că $13 \mid a$, unde $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{48}$.

21. Arătați că $10 \mid a$, unde $a = 7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{64}$.

22. Demonstrați că numărul $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2011}$ este divizibil cu 15.

EDITURA PARALELA 45